

A Dynamic Model of Input-Output Networks

投入产出网络的动态模型



Ernest Liu、Aleh Tsyvinski

汇报人：罗艳、周煜乔、诸佳蓉、瞿微绮

01 & 02

背景介绍与模型设定

INTRODUCTION & MODEL

1.1 研究过程与核心贡献

研究问题

- 1.暂时性TFP冲击消失后，经济为什么可能长期低迷？
- 2.哪些部门的暂时性冲击对整体福利伤害最大？——是规模大的部门，还是上游部门？
- 3.投入产出网络中的调整成本如何改变冲击的传导路径？



核心贡献

- 1.用矩阵方法写出经济恢复路径的闭式解。
- 2.发现上游部门的暂时性冲击，其福利损失远远大于它的经济规模（Domar权重）所预示的程度。
- 3.美国生产网络（172个部门）的福利影响，可以用3个综合指标来解释（95%以上），而静态模型需要几乎全部172个部门的信息。

1.2静态与动态模型的对比及示例网络

静态模型 (Acemoglu et al., 2012) vs 本文动态模型

维度	静态模型	动态模型
调整成本	无，投入联系瞬时恢复	有，投入联系缓慢恢复
冲击重要性	Domar权重 (≈部门规模)	上游性 × 调整成本复合
暂时冲击	与永久冲击无区别	可能产生持久福利损失

两个极简网络 (图1)

- (a) 水平经济
- 各部门只用劳动，无中间投入 → 调整成本无关紧要 → 静态结论成立。
 - 冲击影响 = Domar权重 × 冲击幅度。
- (b) 垂直生产链 (部门1最上游，部门N最下游，仅N进入消费)
- 冲击上游 (部门1)：TFP恢复后，部门1产出立刻恢复，但下游 (2...N) 因调整成本长期低迷 → GDP恢复缓慢。
 - 冲击下游 (部门N)：冲击结束即恢复，无持久影响。
 - 经济含义：上游部门的暂时性冲击，其伤害会沿产业链层层传导并被放大。

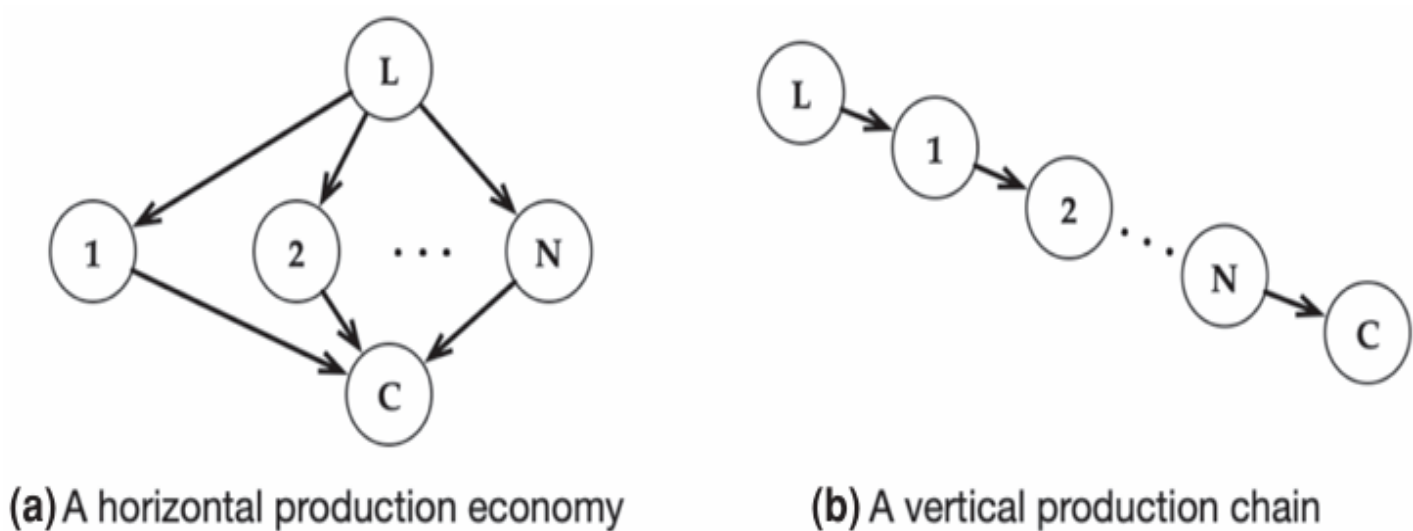


FIGURE 1
Two stylized example networks. (a) A horizontal production economy. (b) A vertical production chain.

2.1 时间与消费者

时间

连续时间 $t \in [0, \infty)$, 折现率 $\rho > 0$ 。
 ρ : 折现率, 衡量未来效用相对于当前效用的权重。

消费者效用

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \ln c(t) dt$$

 U : 代表性消费者的总福利
 $e^{-\rho t}$: 折现因子
 $\ln c(t)$: 当期消费的对数效用 (其相对风险厌恶系数为1)

最终品加总

$$c(t) = \prod_{j=1}^N c_j(t)^{\beta_j}, \quad \sum_{j=1}^N \beta_j = 1$$

 $c(t)$: 总消费 (即GDP)
 $c_j(t)$: 部门 j 的最终品消费量
 β_j : 商品 j 在消费品中的支出份额(常数)

经济含义: 消费者每期将固定收入份额 β_j 用于购买各部门产品, 偏好为对数线性。

2.2生产者

部门i的生产函数:

$$q_i(t) = z_i(t) \ell_i(t)^{a_i} \prod_{j=1}^N m_{ij}(t)^{\sigma_{ij}}, \quad a_i + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} = 1$$

$q_i(t)$:部门i的总产出

$z_i(t)$:全要素生产率(TFP),稳态时 $z_i=1$; 暂时负冲击: $\ln z_i(0^-) = -\tilde{z}_i$,并在 $t=0$ 瞬间恢复为1

\tilde{z}_i : 部门i暂时TFP下降幅度 (对数, 正值表示下降)

$\ell_i(t)$:劳动投入; a_i :劳动产出弹性 (增加值份额)

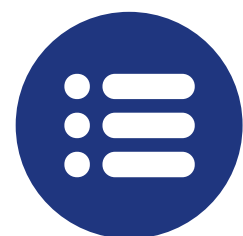
$m_{ij}(t)$:生产中实际使用的来自部门j的中间投入

σ_{ij} :中间投入产出弹性,所有 σ_{ij} 构成投入产出矩阵 $\Sigma = [\sigma_{ij}]$

规模报酬不变: 指数和为1

经济含义: 每个部门的生产需要劳动和所有部门的中间品, 弹性参数 σ_{ij} 刻画了网络中的投入产出联系。

2.3调整成本



购买量与实际使用量的关系 $s_{ij} = m_{ij} \exp \left(\delta \frac{\dot{m}_{ij}}{m_{ij}} \right)$

$s_{ij}(t)$:部门i购买的来自部门j的中间投入数量

$m_{ij}(t)$:生产中实际使用的中间投入数量

$\dot{m}_{ij} = \frac{dm_{ij}}{dt}$: 使用量的变化率

$\delta > 0$:调整成本参数。 δ 越大, 恢复越慢



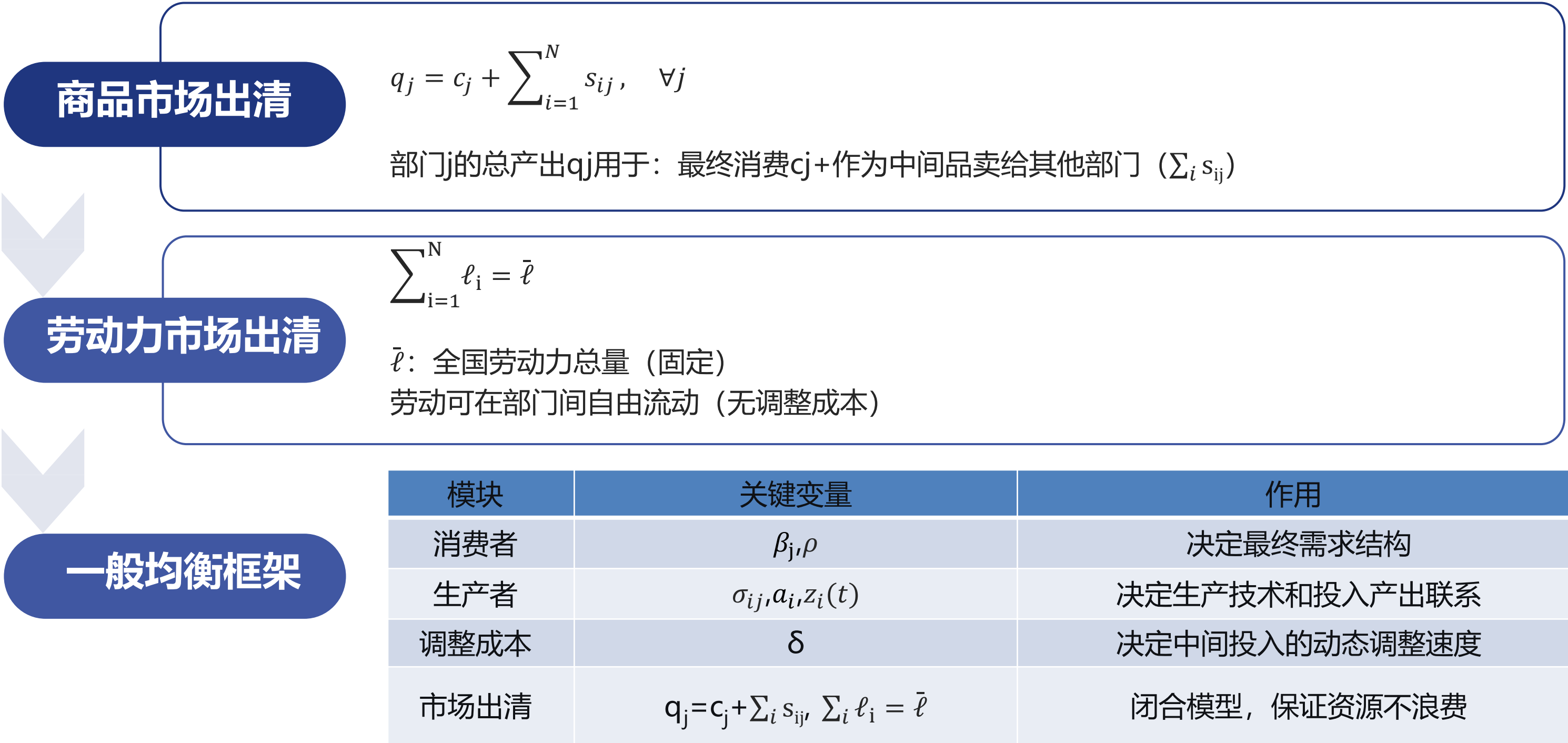
等价运动方程 $\frac{\dot{m}_{ij}}{m_{ij}} = \delta^{-1} (\ln s_{ij} - \ln m_{ij})$

·经济含义: 若企业想扩大使用量($\dot{m}_{ij} > 0$),则必须购买得比实际使用更多($s_{ij} > m_{ij}$)→ “冰山调整成本”

· δ 越大, 同样的缺口下扩张越慢 (恢复越慢)

·稳态时 $\dot{m}_{ij} = 0 \Rightarrow s_{ij} = m_{ij}$, 调整成本消失

2.4市场出清与一般均衡框架



经济含义：整个经济系统由消费结构 β 、投入产出网络 $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ 、调整成本参数 δ 和固定劳动禀赋 $\bar{\ell}$ 共同决定。

03

负向全要素生产率冲击后的复苏动态

RECOVERY DYNAMICS AFTER NEGATIVE TFP SHOCKS

3.1 负向全要素生产率冲击与过渡性经济动态

计划者问题（目标函数）：

在中间投入的初始分配已经确定的情况下，计划者需要选择一种生产路径（即决定劳动力和中间投入的分配方式），从而最大化消费者的福利。引入Cobb-Douglas形式的消费函数： $c(t) = \prod_{j=1}^N (c_j(t))^{\beta_j}$

$$V(\{m_{ij}(0)\}) = \max_{\{\ell_j(\cdot), v_{ij}(\cdot)\}} \int_0^\infty e^{-\rho t} \sum_j \beta_j \ln c_j(t) dt$$

商品市场均衡条件：

每个部门j的总产出 q_j 要么被最终消费 c_j ，要么被用作其他部门的中间投入（包括调整成本损耗）： $q_j(\text{总产出}) = c_j(\text{消费}) + \sum_{i=1}^N s_{ij}(\text{中间品})$ 。又 $q_j = z_j(t) \ell_j(t)^{\alpha_j} \prod_k m_{jk}(t)^{\sigma_{jk}}$ ：

$$c_j(t) = z_j(t) \ell_j(t)^{\alpha_j} \prod_k m_{jk}(t)^{\sigma_{jk}} - \sum_i s_{ij}(t)$$

中间投入运动方程：

存在调整成本的情况下中间投入量随时间变化的规律。调整成本为指数形式 $s_{ij} = m_{ij} \exp(\delta \dot{m}_{ij}/m_{ij})$ ，取对数得：

$$\frac{\dot{m}_{ij}(t)}{m_{ij}(t)} = \delta^{-1} \left(\ln s_{ij}(t) - \ln m_{ij}(t) \right)$$

劳动力市场均衡条件： $\sum_j \ell_j = \bar{\ell}$

生产函数（取对数）： $\ln q_j(t) = \ln z_j + \alpha_j \ln \ell_j(t) + \sum_k \sigma_{jk} \ln m_{jk}(t)$

3.1 负向全要素生产率冲击与过渡性经济动态

构建现值汉密尔顿函数：

$$H = \sum_j \beta_j \left[\alpha_j \ln \ell_j + \sum_k \sigma_{jk} \ln m_{jk} + \ln \left[1 - \sum_i v_{ij} \right] \right] + \delta^{-1} \sum_{ij} \mu_{ij} [\ln v_{ij} + \ln q_j - \ln m_{ij}] + \lambda \left[\bar{\ell} - \sum_j \ell_j \right]$$

其中 μ_{ij} 为共态变量（中间品 m_{ij} 的影子价格）， λ 为劳动力约束乘子。

一阶条件（FOC）：

控制变量：对劳动 ℓ_j 求导（A1）：
$$\frac{\partial H}{\partial \ell_j} = \frac{\alpha_j (\beta_j + \delta^{-1} \sum_i \mu_{ij})}{\ell_j} - \lambda = 0$$

控制变量：为进一步简化引入中间品份额 $v_{ij}(= \frac{s_{ij}(t)}{q_j(t)})$ 求导（A2）：
$$\frac{\partial H}{\partial v_{ij}} = \frac{\beta_j}{1 - \sum_i v_{ij}} - \frac{\mu_{ij} \delta^{-1}}{v_{ij}} = 0$$

状态变量：对中间品存量 m_{jk} 求导（共态方程 A3）：
$$\frac{\partial H}{\partial \ln m_{jk}} = \beta_j \sigma_{jk} + \delta^{-1} \sum_i \mu_{ij} \sigma_{jk} - \delta^{-1} \mu_{jk} = \rho \mu_{jk} - \dot{\mu}_{jk}$$

横截条件：
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mu_{ij}(t) \ln m_{ij}(t) = 0$$

3.1 负向全要素生产率冲击与过渡性经济动态

稳态 $\dot{\mu}_{jk} = 0$ 整理得： $\beta_j + \delta^{-1} \sum_i \mu_{ij} = \mu_{jk}(\delta^{-1} + \rho)/\sigma_{jk}$

定义 $\zeta_j \equiv \mu_{jk}/\sigma_{jk}$ （与k无关），代入得： $\delta\beta_j + \sum_i \mu_{ij} = (1 + \rho\delta)\zeta_j$ （左侧只与j相关，因而右侧也只与j相关、与k无关，因而 μ_{jk} 与 σ_{jk} 成比例， μ 为常数）

写成矩阵形式： $\zeta' = \delta\beta'((1 + \rho\delta)I - \Sigma)^{-1}$

由(A1)(A2)， v_{ij} 、 ℓ_j 均为常数，与时间无关。

又 $v_{ij}(t) = \frac{s_{ij}(t)}{q_j(t)}$ ， $\frac{c_j(t)}{q_j(t)} = \frac{q_j(t) - \sum_{i=1}^N s_{ij}}{q_j(t)} = 1 - \sum v_{ij}$

结论： $c_j(t)/q_j(t)$ 、 $s_{ij}(t)/q_j(t)$ 、 $\ell_j(t)/\bar{\ell}$ 均恒定。

引理1：考虑在0时刻恢复的临时负向全要素生产率（TFP）冲击。在计划者最优解下，对所有 $t \geq 0$ 的转移动态路径，任意商品j分配给消费者及各投入使用部门i的份额均为常数；同时，部门间的劳动分配比例也为常数，即对所有部门j， $\ell_j/\bar{\ell}$ 不随时间变化。

3.1 负向全要素生产率冲击与过渡性经济动态

从引理1到公共增长率——关键简化：所有部门使用同一投入的扩张速度相同

$$x_j(t) \equiv \ln \sum_{i=1}^N s_{ij}(t) - \ln \sum_{i=1}^N m_{ij}(t)$$

- 含义：商品j的“总购买量 vs 总使用量”的对数缺口。
- 稳态时 $x_j = 0$ ； $x_j > 0$ 表示正投入扩张。

引理1的推论：

- 每个j分配给各买家的比例 $v_{ij} = s_{ij}/q_j$ 恒定
- 临时冲击使所有买家的初始 m_{ij} 按相同比例偏离稳态
- 由此可证： $\ln s_{ij} - \ln m_{ij}$ 与买家i 无关（记为公共值）

公共增长率：

由运动方程 $\dot{m}_{ij}/m_{ij} = \delta^{-1}(\ln s_{ij} - \ln m_{ij})$ 得：

$$\frac{\dot{m}_{ij}}{m_{ij}} = \delta^{-1} x_j(t) \text{ 对所有 } i \text{ 成立}$$

→ 所有部门对投入j的扩张速度相同，完全由 $x_j(t)$ 决定

降维： N^2 个状态变量 → 只需追踪 N 个 $x_j(t)$ ，封闭解成为可能

3.1 负向全要素生产率冲击与过渡性经济动态

引理2：部门产出与GDP的运动规律

部门产出增速：

推导：

- $\frac{d \ln q_i}{dt} = \underbrace{\frac{d \ln z_i}{dt}}_{=0} + \alpha_i \underbrace{\frac{d \ln \ell_i}{dt}}_{=0} + \sum_j \sigma_{ij} \frac{d \ln m_{ij}}{dt}$
- 引理1的推论： $\frac{\dot{m}_{ij}}{m_{ij}} = \delta^{-1} x_j(t)$ 对所有 i 成立

核心方程： $\frac{d \ln q_i}{dt} = \sum_j \sigma_{ij} \cdot \delta^{-1} x_j(t) \rightarrow$ 写成矩阵形式： $\frac{d \ln q}{dt} = \delta^{-1} \Sigma x(t)$

初始条件： $\ln q(0) = \underbrace{\ln q^{ss}}_{\text{初始稳态}} - \underbrace{(I - \Sigma)^{-1} \tilde{z}}_{\text{永久负冲击的网络传导损失}} + \underbrace{\tilde{z}}_{TFP \text{恢复}}$
 $= \ln q^{ss} - \Sigma(I - \Sigma)^{-1} \tilde{z}$

GDP增速：

推导：

- GDP 是 Cobb-Douglas 消费（取对数）： $\ln c = \sum_j \beta_j \ln c_j$
- 引理1： $c_j(t)/q_j(t)$ 恒定 $\rightarrow \frac{d \ln c_j}{dt} = \frac{d \ln q_j}{dt}$
- 代入GDP导数： $\frac{d \ln c}{dt} = \sum_j \beta_j \frac{d \ln q_j}{dt} = \beta' \cdot \frac{d \ln q}{dt}$
- 再代入部门产出动态方程： $\frac{d \ln q}{dt} = \delta^{-1} \Sigma x(t)$

核心方程： $\frac{d \ln c(t)}{dt} = \delta^{-1} \beta' \Sigma x(t)$

初始条件： $\ln c(0) = \ln c^{ss} - \beta' \Sigma (I - \Sigma)^{-1} \tilde{z}$

供需比动态：

推导：

- 定义： $x_j = \ln \sum_i s_{ij} - \ln \sum_i m_{ij}$ ，求导： $\frac{dx_j}{dt} = \frac{d \ln \sum_i s_{ij}}{dt} - \frac{d \ln \sum_i m_{ij}}{dt}$
- 引理1： $c_j(t)/q_j(t)$ 恒定 $\rightarrow \frac{d \ln c_j}{dt} = \frac{d \ln q_j}{dt}$
- 引理1的推论： $\frac{\dot{m}_{ij}}{m_{ij}} = \delta^{-1} x_j(t)$ 对所有 i 成立
- 部门产出动态方程： $\frac{d \ln q_i}{dt} = \delta^{-1} \sum_j \sigma_{ij} x_j(t)$

核心方程： $\frac{dx_j}{dt} = \delta^{-1} \sum_k \sigma_{jk} x_k(t) - \delta^{-1} x_j(t)$

\rightarrow 写成矩阵形式： $\frac{dx(t)}{dt} = -\delta^{-1} (I - \Sigma) x(t)$

初始条件： $x(0) = \tilde{z}$ (t=0, 供需缺口等于冲击幅度)

线性ODE的闭式解： $x(t) = e^{-\delta^{-1} (I - \Sigma) t} \tilde{z}$

矩阵指数： $e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k}{k!} \rightarrow$ 随时间 t 增大， $x(t)$ 指数衰减到0

TFP 恢复后，经济动态完全由中间品供需缺口 $x(t)$ 驱动： 缺口衰减 \rightarrow 产出回升 \rightarrow GDP 恢复。全程由投入网络 Σ 和调整成本 δ 决定。

3.1 负向全要素生产率冲击与过渡性经济动态

命题1：产出与消费的流动

部门产出动态路径：

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{q}(t) &= \ln \mathbf{q}(0) + \int_0^t \frac{d \ln \mathbf{q}(s)}{ds} ds \\ &= \ln \mathbf{q}(0) + \int_0^t \delta^{-1} \Sigma \cdot e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)s} \tilde{\mathbf{z}} ds \text{ (代入引理2的部门产出路径与} x(t) \text{的解)} \\ &= \ln \mathbf{q}(0) + \delta^{-1} \Sigma \cdot \delta (I - \Sigma)^{-1} (I - e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t}) \tilde{\mathbf{z}} \text{ (求矩阵指数积分)} \\ &= \ln q^{ss} - \Sigma (I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t} \tilde{\mathbf{z}} \text{ (代入} \ln q(0) \text{的公式)} \end{aligned}$$

总消费的动态路径：

由引理1： $\ln c(t) = \beta' \ln \mathbf{q}(t)$ ，代入产出方程：

$$\ln c(t) = \ln c^{ss} - \beta' \Sigma (I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t} \tilde{\mathbf{z}}$$

恢复链条：部门j生产率先恢复→j产出立刻涨→慢慢带动所有用j的部门i→i产出逐步上涨。

缺口=所有高阶网络损失总和（上游轮次越多，损失越大）： $-\Sigma(I - \Sigma)^{-1} \tilde{\mathbf{z}} = -\sum_{s=1}^{\infty} \Sigma^s \tilde{\mathbf{z}} - \Sigma^s$

调整成本的作用： δ 越小→ $\lim_{\delta \rightarrow 0} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t} = 0$ →瞬间收敛到稳态； δ 越大→恢复越慢。

- 命题1把引理2 “供需缺口 $x(t)$ 指数衰减→带动产出、消费逐步回弹” 的动态过程，写成了可直接计算的闭式公式，核心是：临时冲击后，随着时间的推移，每一级别的关联关系都在持续恢复中，但较高级别的关联关系恢复得更为缓慢，持久损失最大；
- 通过经济体的渐进式调整所描述的动态系统的性质，与输入-输出矩阵的性质有着密切的联系，而这种联系是通过该矩阵的幂级数 Σ^s 来体现的。参数 δ 则决定了调整的速度。

3.2行业冲击对福利的影响

命题2：临时性TFP冲击对福利的影响

福利损失的来源: 调整成本导致中间品恢复缓慢，进而导致GDP长期低于稳态水平，造成福利损失。

福利损失：把所有时期贴现后的消费损失加总 = 总福利损失： $V(\tilde{z}) - V^{ss} = \int_0^\infty e^{-\rho s} (\ln c(s) - \ln c^{ss}) ds$

代入命题1消费路径： $V - V^{ss} = - \int_0^\infty e^{-\rho s} \beta' \Sigma (I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I - \Sigma)s} \tilde{z} ds = -\beta' \Sigma (I - \Sigma)^{-1} \left(\int_0^\infty e^{-(\rho I + \delta^{-1}(I - \Sigma))s} ds \right) \tilde{z}$

由矩阵积分： $\int_0^\infty e^{-As} ds = A^{-1}$ (A 正定)，令 $A = \rho I + \delta^{-1}(I - \Sigma)$ ，化简得： $V - V^{ss} = -\beta' \Sigma (I - \Sigma)^{-1} \cdot \delta [(1 + \rho\delta)I - \Sigma]^{-1} \tilde{z}$

核心方程：
$$V - V^{ss} = \beta' \frac{1}{\rho} \left[(I - \Sigma)^{-1} - \left(I - \frac{\Sigma}{1 + \rho\delta} \right)^{-1} \right] \tilde{z} = -v' \tilde{z}$$

福利影响向量
$$v' \equiv \frac{1}{\rho} \left[\beta' (I - \Sigma)^{-1} - \beta' \left(I - \frac{\Sigma}{1 + \rho\delta} \right)^{-1} \right]$$

v' 的幂级数展开：
$$v' = \frac{1}{\rho} \beta' \sum_{s=0}^\infty (1 - (1 + \rho\delta)^{-s}) \Sigma^s$$

- 临时冲击的动态影响，权重 $(1 - (1 + \rho\delta)^{-s})$ 随传导轮次 s 递增；
- 直接、短链损失被大幅削弱，长供应链、高阶网络损失被放大。

Domar权重：
$$\gamma' = \beta' \sum_{s=0}^\infty \Sigma^s$$

- 永久冲击的稳态影响，每轮网络传导权重均为1；
- 直接效应、短链、长链损失同等重要。

权重分解：
$$v' = \frac{1}{\rho} \beta' \left[0 \cdot \Sigma^0 + \left(1 - \frac{1}{1 + \rho\delta} \right) \Sigma^1 + \left(1 - \frac{1}{(1 + \rho\delta)^2} \right) \Sigma^2 + \dots \right]$$

核心区别: 临时冲击直接影响 (Σ^0) 权重为0，高阶传导（上游）权重更高 ($s \rightarrow \infty, \Sigma^s \rightarrow 1$)。

- 临时冲击的福利损失，更侧重高阶网络传导（全局影响），而非低阶传导（局部影响）。
- 在存在调整摩擦的情况下，那些通过复杂渠道与消费者相连的行业的冲击所造成的破坏性影响，会远远超过这些行业在国民经济中的比重。即便各行业的全要素生产率能够恢复，这类冲击对GDP的负面影响仍然会持续很长时间。

3.2行业冲击对福利的影响

福利影响与“上游性”概念：上游性的定义：上游性衡量产出到达最终消费者的平均链路轮次。

上游性： $\eta_i \equiv \frac{v_i}{\gamma_i}$
 v_i ：部门*i*临时冲击的福利影响； γ_i ：部门*i*的Domar权重（永久冲击影响）

η_i 的递归形式（网络互联）：

$$\eta_i = \frac{1}{1 + \rho\delta} \sum_{n=1}^N \theta_{in} (\eta_n + \delta)$$

令 $r = \frac{1}{1+\rho\delta}$, $a' = \beta'(I - r\Sigma)^{-1}$
 由 $v' = \frac{1}{\rho}(\beta'(I - \Sigma)^{-1} - a')$ 和 $\gamma' = \beta'(I - \Sigma)^{-1}$, 得: $\rho\eta_j = 1 - \frac{a_j}{\gamma_j}$

又: $\frac{a_j}{\gamma_j} = \frac{\beta_j}{\gamma_j} + r \sum_i \sigma_{ij} \frac{a_i}{\gamma_j}$
 代入需求矩阵 $\theta_{ji} = \sigma_{ij}\gamma_i/\gamma_j$, 且 $\sum_i \theta_{ji} = 1$ （需求矩阵行和为1）,
 得: $\rho\eta_j = \sum_i \theta_{ji} - r \sum_i \theta_{ji} (1 - \rho\eta_i)$

整理得到隐式表达式: $\eta_j = \frac{\delta}{1+\rho\delta} \sum_i \theta_{ji} + \frac{1}{1+\rho\delta} \sum_i \theta_{ji} \eta_i = \frac{1}{1+\rho\delta} \sum_{n=1}^N \theta_{in} (\eta_n + \delta)$

• **含义:** 如果部门*i*主要销售给其他上游部门（高 θ_{in} 且高 η_n ）, 则其自身的上游性也高。

η_i 的级数形式（供应链轮次）： 诺伊曼级数展开:

$$\eta = \delta \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \rho\delta} \Theta^s \right) \mathbf{1}$$

- s 越大→链路越长→越上游;
- **含义:** 高阶长链路贡献更大, 上游损失更持久。

Antràs et al. (2012) 定义:

$$Up_i = \sum_{s=0}^{\infty} \underbrace{(s+1)}_{a_s} \cdot \frac{[\beta'\Sigma^s]_i}{\gamma_i}$$

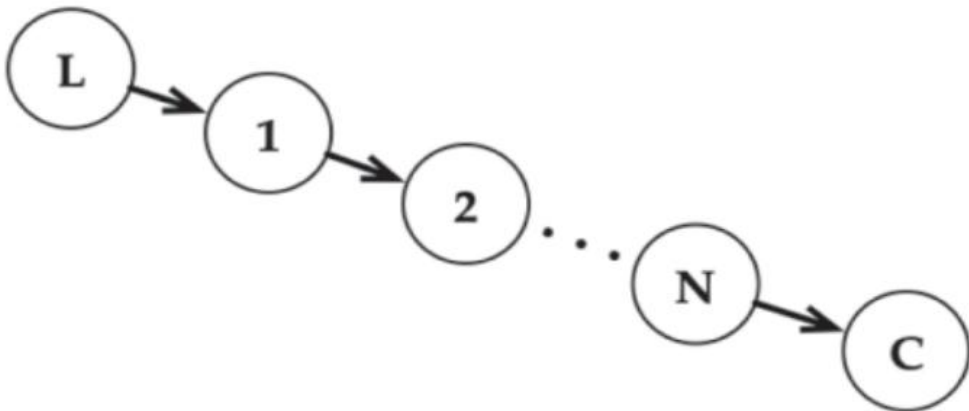
$[\beta'\Sigma^s]_i$: 部门*i*通过*s*轮链路销售给消费者的份额。
 Up_i : 产出到达消费者的平均链路轮次。
 权重: **线性递增**, 衡量**平均传导轮次**, 适配**永久冲击 / 静态模型**。

本文中的模型:
$$\eta_i = \frac{v_i}{\gamma_i} = \sum_{s=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\rho} (1 - (1 - \rho\delta)^{-s})}_{a_s} \cdot \frac{[\beta'\Sigma^s]_i}{\gamma_i}$$

η_i 是一种广义的上游性度量, 权重序列 a_s 随*s*递增——更长的链路（更高阶的传导）被赋予更高的权重, 与临时冲击的福利损失模式一致。

- **临时冲击的福利损失, 不仅取决于部门规模（Domar权重）, 更取决于其上游性。**
- **上游部门（高 η_i ）的临时冲击, 由于其恢复周期更长, 对GDP和福利的持久影响更大。这解释了现实中上游临时冲击更为致命。**

3.3垂直生产链-四部门实例



(b) A vertical production chain

Σ 矩阵: 4 部门垂直产业链的投入产出系数矩阵, 描述部门间单向的上下游投入依赖关系。

β 向量: 最终消费份额向量, 本模型中仅最下游部门产品直接进入居民消费。

所有部门 Domar 权重均为 1, 静态下对永久 TFP 冲击的重要性完全相同。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \gamma' = \beta'(I - \Sigma)^{-1}$$

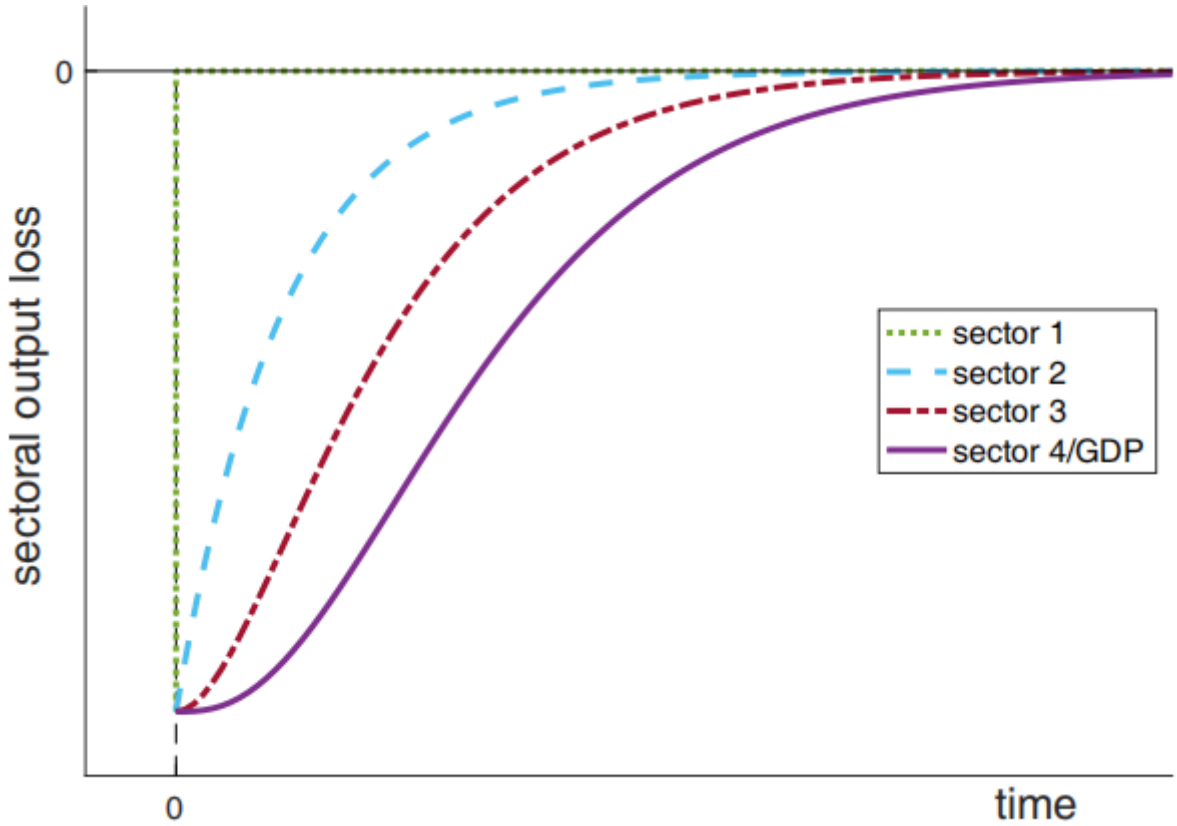
$$\gamma' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

将Domar权重代入动态基准模型下的福利影响向量 $v' \equiv \frac{1}{\rho} \left[\beta'(I - \Sigma)^{-1} - \beta' \left(I - \frac{\Sigma}{1 + \rho\delta} \right)^{-1} \right]$

$$\rightarrow v' \propto \left[1 - (1 + \rho\delta)^{-N}, 1 - \left(\frac{1}{1 + \rho\delta} \right)^2, 1 - \frac{1}{1 + \rho\delta}, 0 \right]$$

$$\rightarrow v_1 > v_2 > v_3 > v_4 = 0$$

上游临时冲击会沿着产业链层层传导, 导致下游部门产出损失持续时间更长; 居民福利损失是消费损失的贴现和, 因此下游产出恢复越慢, 累积福利损失就越大



3.4.1 异质调整成本 $(\delta \rightarrow \delta_{ij})$

基准模型: $s_{ij} \equiv m_{ij} \times \exp(\delta m_{ij}/m_{ij})$

↓ 调整成本 δ 形式改变, 结论是否改变?

调整 δ 为 δ_{ij} , 即引入每一对买卖行业专属的异质调整成本, i为买家, j为卖家。

此时 $\frac{\Sigma}{1+\rho\delta} \equiv \left[\frac{\sigma_{ij}}{1+\rho\delta} \right]$ 转化为 $\Omega \equiv \left[\frac{\sigma_{ij}}{1+\rho\delta_{ij}} \right]$

➔ 福利公式变为 $v' = \frac{1}{\rho} [\beta'(I - \Sigma)^{-1} - \beta'(I - \Omega)^{-1}]$

可计算得, $\beta'(I - \Omega)^{-1} = \left[\frac{1}{(1+\rho\delta_{43})(1+\rho\delta_{32})(1+\rho\delta_{21})}, \frac{1}{(1+\rho\delta_{43})(1+\rho\delta_{32})}, \frac{1}{1+\rho\delta_{43}}, 1 \right]$

又 ∵ 相对福利损失 $\eta' = \frac{v'}{y'} = \frac{1}{\rho y'} [\gamma' - \beta'(I - \Omega)^{-1}]$,

∴ $\eta_i \propto 1 - \beta'(I - \Omega)^{-1}$

代入得:

$$\eta \propto \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{(1 + \rho\delta_{43})(1 + \rho\delta_{32})(1 + \rho\delta_{21})} \\ 1 - \frac{1}{(1 + \rho\delta_{43})(1 + \rho\delta_{32})} \\ 1 - \frac{1}{1 + \rho\delta_{43}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

结论 1:

上游行业的福利损失被放大, 且调整成本越高, 放大效应越强。

结论 2:

即使调整成本是异质的, 全文的核心结论依然成立。
(上游基础制造业的短期波动, 对经济长期福利伤害远大于下游服务业)

3.4.2更一般的生产函数和调整成本形式

基准模型
生产函数&
消费函数

$$q_j(t) = z_j(t)l_j(t)^\alpha \prod_{i=1}^n m_{ij}(t)^{\sigma_{ij}} \quad (\alpha + \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} = 1)$$
 --部门 j 的生产函数为 Cobb-Douglas 形式

$$C(t) = \prod_{j=1}^n c_j(t)^{\beta_j} \quad (\sum_{j=1}^n \beta_j = 1)$$
 --总消费 C(t)由各部门产品按 Cobb-Douglas 形式合成

基准模型调整成本： $\frac{d \ln m_{ij}}{dt} = \delta^{-1}(\ln s_{ij} - \ln m_{ij})$

↓ 生产函数、消费函数、调整成本变成更一般的形式，结论是否改变？

更一般的
生产函数&
消费函数

$$q_i = f_i(z_i, l_i, \{m_{ij}\})$$

$$c(t) = c(\{c_j(t)\})$$

更一般的调整成本： $\frac{d \ln m_{ij}}{dt} = \ln g_{ij}(\ln s_{ij}, \ln m_{ij})$,
 (只满足①稳态 $s_{ij} = m_{ij}$ 时增速为 0；② g_{ij} 在稳态局部零次齐次。)

∴任意函数 F(x) 在稳态附近，都有 $\ln F \approx \ln F_{ss} + \frac{\partial \ln F}{\partial \ln x} \cdot \ln x$
 ∴对消费函数在稳态点做一阶泰勒： $\beta_j = \frac{\partial \ln c}{\partial \ln c_j}$
 对生产函数在稳态点做一阶泰勒： $\sigma_{ij} = \frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln m_{ij}}$
 对调整成本运动方程做一阶泰勒： $\omega_{ij}^{-1} = \frac{\partial \ln g_{ij}}{\partial \ln s_{ij}}$

用 ω_{ij}^{-1} 替换 δ^{-1} ，按照基准模型一样的流程（具体推导见附录），
 可以得出 v' 依然 $= \frac{1}{\rho} [\beta'(I - \Sigma)^{-1} - \beta'(I - \Omega)^{-1}]$ ，可以得出相同结论。
 生产函数、消费函数和调整成本的设定形式不影响结论。

3.4.3投入的扩张、收缩都缓慢进行的情况

产出的变化 = 技术（TFP，z）的直接变化 + 投入(m(t))变化带来的间接变化。
 其中，z是外生的，没有调整成本，所以可以瞬间变化。**而投入是否可瞬间变化是本节讨论的问题。**

基准模型假设：
 ①仅TFP恢复后、投入由低位向稳态扩张时存在调整摩擦；
 ②冲击到来时，投入可以瞬间收缩、无调整成本。

↓ **双向都有调整成本，结论是否改变？**

本节假设双向都有摩擦：
 ①冲击到来、经济变差时：投入不能瞬间暴跌，也要慢慢收缩；
 ②TFP 恢复、经济回暖时：投入还是慢慢扩张、慢慢往上涨。

模型：
 设负面 TFP 冲击在 t=0到达，在t=T完全恢复。t ∈ [0,T)时，生产率逐步下行，投入慢慢收缩；t ≥ T时，生产率慢慢回归，投入慢慢扩张。**收缩和扩张都有调整成本。**

边界条件：

$$\begin{cases} \ln q(0) = \ln q^{ss} - \tilde{z} \\ \ln q(T) = \lim_{t \rightarrow T^-} \ln q(t) + \tilde{z} \\ x(0) = -\tilde{z} \end{cases}$$

此时福利影响为：

$$V - V^{ss} = \underbrace{\beta' \int_0^T e^{-\rho t} (\ln q(t) - \ln q^{ss}) dt}_{\text{冲击期}} + \underbrace{\beta' \int_T^\infty e^{-\rho t} (\ln q(t) - \ln q^{ss}) dt}_{\text{回弹恢复期}}$$

$$\rightarrow V - V^{ss} = -\frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) \beta' \left(I - \frac{\Sigma}{1 + \rho \delta} \right)^{-1} \tilde{z}$$

结论：
 冲击持续时间 T 越长，(1 - e^{-ρT})越接近1，福利损失越大，复苏越慢。

3.4.4生产率缓慢恢复的情况

产出的变化 = 技术（TFP，z）的直接变化 + 投入(m(t))变化带来的间接变化。

基准模型假设：TFP（z）在t=0时刻不连续瞬时恢复。

↓ **TFP恢复需要时间，结论是否改变？**

本节将模型拓展至TFP以指数形式慢慢回归稳态的情形。

模型：

设定： $\ln z_{it} - \ln z_i = e^{-\phi t} \tilde{z}_i$ ， ϕ 是TFP复苏速率，越大恢复越快。 \tilde{z}_i 是行业初始受到的负面冲击大小。可求出z关于时间的变化率： $\frac{d \ln z_{it}}{dt} = -\phi e^{-\phi t} \tilde{z}_i$

推导：

∴产出的变化 = 技术（TFP，z）的直接变化 + 投入(m(t))变化带来的间接变化。

∴产出的动态方程为： $\frac{d \ln q}{dt} = \frac{d \ln z}{dt} + \delta^{-1} \sum x$

求出x的变化率： $\dot{x} = \frac{d \ln z}{dt} - \delta^{-1}(I - \Sigma)x$ （在基准模型3.1的基础上增加了TFP的变化率）

→代入 $\frac{d \ln z}{dt} \rightarrow \dot{x} = \phi e^{-\phi t} \tilde{z} - \delta^{-1}(I - \Sigma)x$

解出 $x(t) = \phi(\delta^{-1}(I - \Sigma) - \phi I)^{-1}(e^{-\phi t} - e^{-\delta^{-1}(I - \Sigma)t})\tilde{z}$

代入福利损失函数： $V - V^{ss} = \int_0^\infty e^{-\rho t} \cdot (\ln c(t) - \ln c^{ss})dt$ 、 $\ln c(t) - \ln c^{ss} = \beta'(\ln q(t) - \ln q^{ss})$ ，

此时福利影响为：

$$V(\tilde{z}; \phi) - V^{ss} = \beta'((1 - \phi\delta)I - \Sigma)^{-1} \left[\frac{\phi\delta}{\rho} \left((I - \Sigma)^{-1} - \left(I - \frac{\Sigma}{1 + \rho\phi\delta} \right)^{-1} \right) - \frac{1 - \phi\delta}{\rho + \phi} I \right] \tilde{z}$$

结论：

TFP恢复快慢 ϕ 会决定福利损失的大小

- Φ越小（恢复越慢）→福利损失越大
- Φ越大（恢复越快）→福利损失越小

基准模型中没有引入参数 ϕ ，是否会影响模型的普适性？

不会影响模型的普适性！

可为每个真实行业引入一个虚拟配套行业，把TFP恢复速度的快慢问题转化为使用中间投入的快慢的问题。

假设虚拟行业只生产中间投入品，它的TFP瞬间恢复；而虚拟行业生产出的投入品完全给真实行业用，只不过中间投入因为调整成本的存在而慢慢恢复，这样就符合了基准模型的设定，仅需要回归调整成本的讨论。

04 & 05

美国投入产出表分析与全文总结

Analysis of U.S. Input–Output Tables & Conclusion

4.1 评估临时性冲击对福利的影响：美国投入产出表分析

研究内容

依托美国 172 部门投入产出数据，通过指标测算与谱分解实证，对比 Domar 权重（永久冲击）与含上游度的指标 v （临时冲击），证实临时冲击福利损失由上游属性主导、仅三大产业因子即可刻画美国生产网络波动。

供应链摩擦的现实校准

- 年度贴现率： $\rho = 4\%$
- 指数调整成本在一阶上等价于一个 time-to-build 模型：
 - δ 对应于投入要素被订购到它们被交付之间的平均延迟
 - 可以利用未交付订单比率，即未填补订单的存量价值与交付商品的流量价值之间的比例来衡量
- 数据来源：美国人口普查局 (2021) M3 制造业出货、库存和订单调查 (2010-2019 平均，剔除疫情异常值)
- 结果：全美跨行业平均供应链延迟为 3.2 个月
 - 对应于年度频率下的 $\delta_j = 0.267$

Domar权重 VS 指标 v ：分别刻画永久冲击与临时冲击

美国临时性行业冲击的福利影响 v

10 sectors with the highest v_i	10 sectors with the smallest v_i
Real estate	Offices of other health practitioners
Agencies, brokerages, other insurance related activities	Nursing and residential care facilities
Management of companies and enterprises	Outpatient care centres
Wholesale trade	Offices of physicians
Advertising, public relations, and related services	Child day care services
Motor vehicle parts manufacturing	Audio and video equipment manufacturing
Employment services	Other miscellaneous manufacturing
Insurance carriers	Gambling industries (except casino hotels)
Oil and gas extraction	Furniture and kitchen cabinet manufacturing
Management, scientific, technical consulting services	Rental centres

规模庞大的行业：如房地产业和贸易业

规模小得多但处于极上游的制造业行业，如汽车零部件制造业以及石油和天然气开采业

“上游度”的重要性

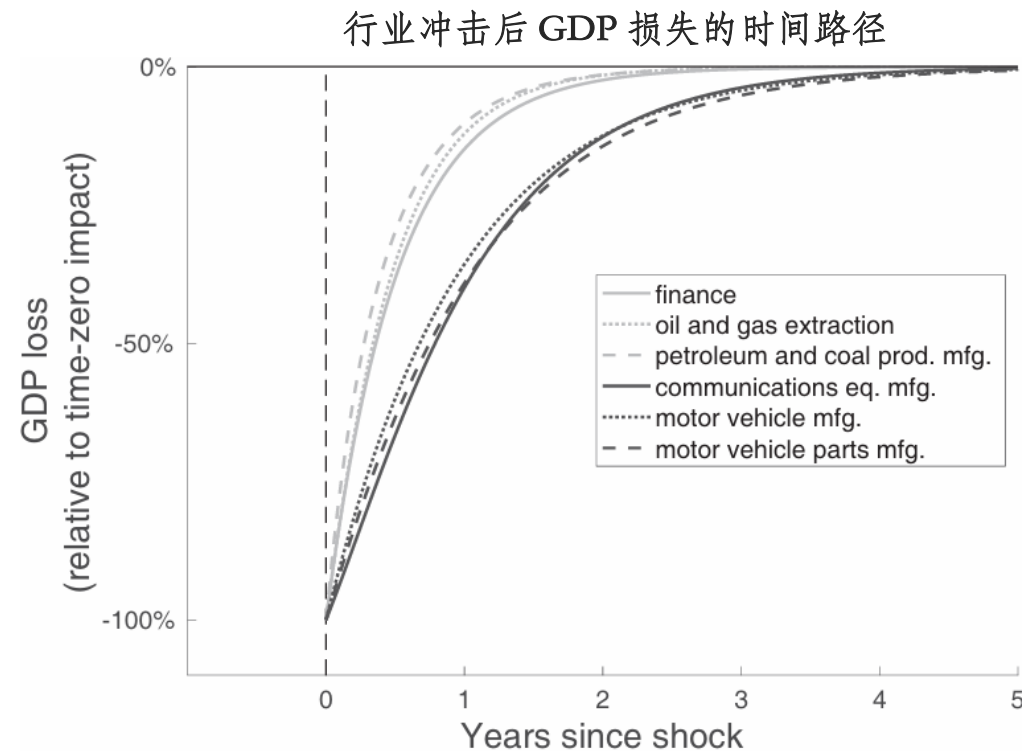
在Domar权重与指标 v 衡量的福利影响前十名中，除了房地产业、贸易业，以及咨询服务业均有出现外，其他均不重合

临时性与永久性冲击的福利影响比较

Ten sectors with the highest Domar weight	Ten sectors with the highest v_i rel. to Domar weight
Real estate	Railroad rolling stock manufacturing
Wholesale trade	Aerospace product and parts manufacturing
Hospitals	Motor vehicle parts manufacturing
Retail	Foundries
Food services and drinking places	Metal ore mining
Insurance carriers	Support activities for mining
Management, scientific, technical consulting services	Metalworking machinery manufacturing
Offices of physicians	Agencies, brokerages, other insurance related activities
Finance (securities, commodity contracts, funds)	Iron and steel mills and ferroalloy manufacturing
Petroleum and coal products manufacturing	Forging and stamping

} 多为上游制造业产业

如下图，灰色曲线组代表了规模大，但链条较短的行业；黑色曲线组代表了规模较小，但处于更长、更复杂供应链顶端的行业。大规模组行业冲击的半衰期平均为 4 个月，而上游组的半衰期是其两倍以上；上游组在冲击恢复 1 年后的 GDP 损失是大规模组相应损失的 3 倍。



4.1 评估临时性冲击对福利的影响：美国投入产出表分析

调整成本异质性的定量评估

- 构建福利影响指标 v^{base}
 - 具有同质性调整成本 $\delta = 0.267$
 - 定义 $\eta_i^{base} = v_i^{base} / \gamma_i$, η_i^{base} 中所有的跨行业变动均源于网络结构

	η	η^{base}	Upstream
η	/	0.97	0.97
η^{base}	0.91	/	1.0
Upstream	0.91	1.0	/

- η 、 η^{base} 以及上游度指标之间两两相关
 - 结论：经规模调整后的福利影响中绝大部分的变动也都源于网络结构，调整成本中的异质性在定量上并不重要！**

现实解释：

为什么调整成本 δ_{ni} 中的异质性对结果几乎没有影响？

- 美国投入产出网络的结构
 - 因为调整成本通过投入产出关联复合，垂直网络中相对处于上游的行业总是具有更高的 η ，无论调整成本的异质性如何。
- 现实数据如右图：行业按上游度严格排序，并具有高度不对称的投入产出关系。
 - 投入绝大部分是单向的，使得处于最上游行业的产出受到最多调整成本复合的影响。
 - 经规模调整后的福利敏感性与行业上游度保持极好的契合，而调整成本中的异质性几乎没有影响。

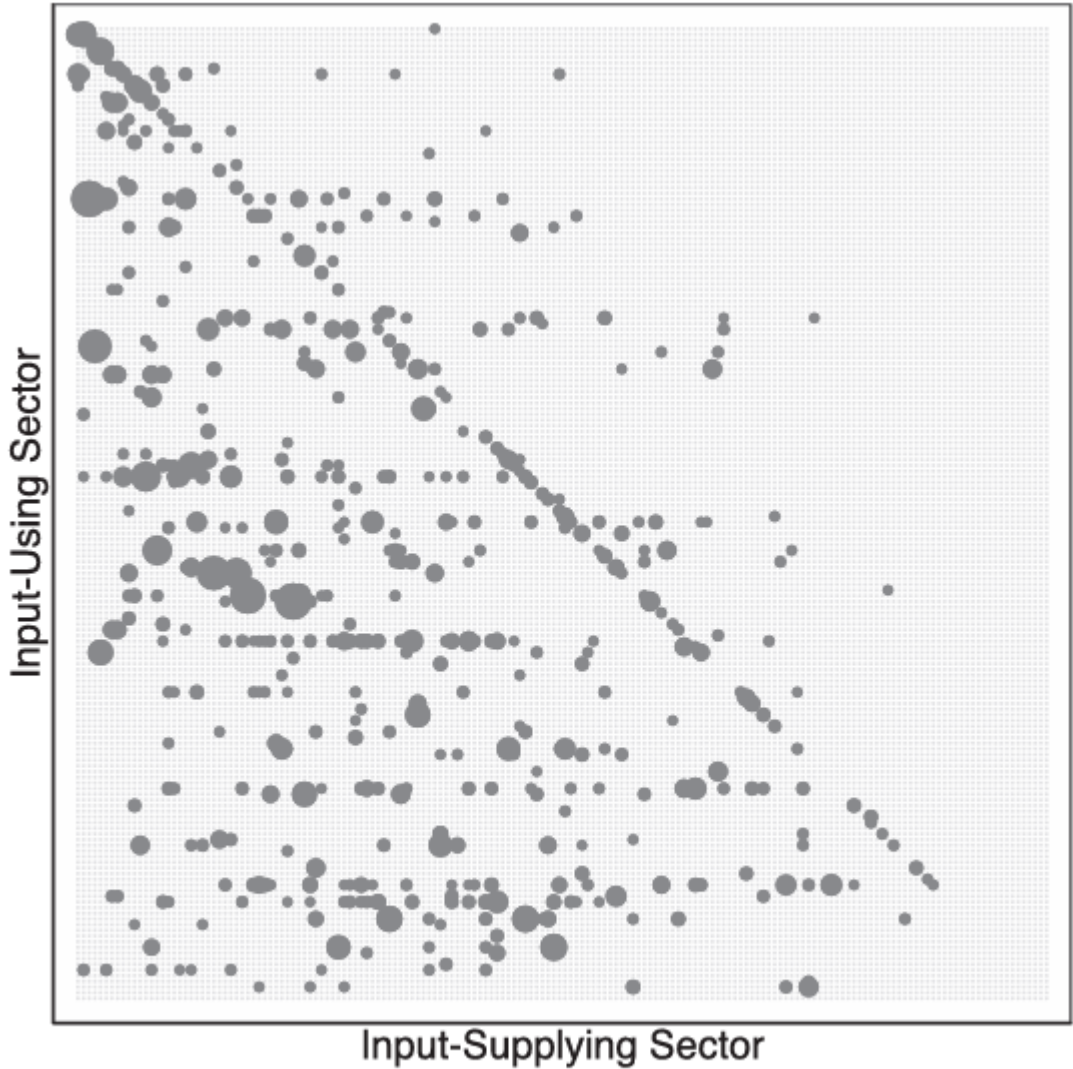


FIGURE 6
The input-output demand matrix of the U.S. economy

调整成本中的异质性在定量上并不重要；临时性冲击福利影响的大部分变动都源于网络结构。

4.2 美国投入产出矩阵的因子结构

以谱分析考察福利影响的决定因素

- 对投入产出表进行特征分解
 - $\Sigma = U\Lambda W$ ($W = U^{-1}$)
 - Λ 是一个特征值 $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ 按绝对值降序排列的对角矩阵
 - $\Sigma u_h = \lambda_h u_h, w_h' \Sigma = \lambda_h w_h'$

当 u_h (w_h') 被 Σ 左乘 (右乘) 时, 其与自身成正比, 且按相应的特征值 λ_h 进行了缩放。

- 考虑一个直接影响等于特征向量 u_h 的TFP冲击
 - $\Sigma u_k = \lambda_k u_k; \Sigma^2 u_k = \lambda_k^2 u_k; \dots$
 - 每一阶网络效应的影响按等于特征值 λ_h 的因子成比例地衰减

任何 TFP 冲击向量 \tilde{z} 均可以写为右特征向量的线性组合 $\{a_k\}_{k=1}^N$

- 其中权重 $a_k = w_k' \tilde{z}$ 可以利用左特征基 W 来恢复

- 利用特征基 U 和 W 来进一步分解行业冲击的总体影响, 静态模型时:
 - 有Domar权重: $\gamma' = \beta' \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-\lambda_k} u_k w_k'$
 - 如果 $l = k$, 则 $w_l' u_k = 1$, 否则为零

当冲击为 $\tilde{z} = u_k$ 时, 有

$$\gamma' u_k = \beta' \sum_{l=1}^N \frac{1}{1-\lambda_l} u_l w_l' u_k = \frac{1}{1-\lambda_k} \beta' u_k$$

冲击 u_k 仅通过第 k 个特征分量影响消费, 直接效应为 $\beta' u_k$
 则第 s 阶间接网络效应为 $\lambda_k^s \beta' u_k$, 且累积效应为:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_k^s \beta' u_k = \frac{1}{1-\lambda_k} \beta' u_k$$

动态模型时:

- 有 $v' = \beta' \sum_{k=1}^N \frac{\delta \lambda_k}{(1-\lambda_k)(1+\rho\delta-\lambda_k)} u_k w_k'$
- 如果 $l = k$, 则 $w_l' u_k = 1$, 否则为零

当冲击为 $\tilde{z} = u_k$ 时, 有

$$v' u_k = \frac{1}{\rho} \beta' u_k \left(\sum_{s=0}^{\infty} (1 - (1 + \rho\delta)^{-s}) \lambda_k^s \right) = \frac{\delta \lambda_k}{(1-\lambda_k)(1+\rho\delta-\lambda_k)} \beta' u_k$$

项 $(1 - (1 + \rho\delta)^{-s})$ 对冲击的直接效应 ($s = 0$)赋予了零权重, 并对高阶网络效应赋予了递增的权重序列

4.2 美国投入产出矩阵的因子结构

实证结果表明：临时性冲击的福利影响 v 可以用一个低维的因子表示进行极好的逼近，而Domar权重不具备低维表示——

$$\begin{cases} \gamma' = \beta' \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-\lambda_k} u_k w_k' \\ v' = \beta' \sum_{k=1}^N \frac{\delta \lambda_k}{(1-\lambda_k)(1+\rho\delta-\lambda_k)} u_k w_k' \end{cases}$$

↓ 计算前 h 个特征分量的部分和

$$\begin{cases} \gamma'_{(h)} = \beta' \sum_{k=1}^h \frac{1}{1-\lambda_k} u_k w_k' \\ v'_{(h)} = \delta \beta' \sum_{k=1}^h \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)(1+\rho\delta-\lambda_k)} u_k w_k' \end{cases}$$

捕捉了通过前 h 个特征分量呈现的行业冲击的福利影响

- 前三个特征向量捕捉了 v 中 94% 的变动
 - 任何行业冲击的绝大部分福利影响均可以通过冲击在前三个特征向量上的负荷来解释
 - 这是因为：每个特征分量对 v' 的贡献为 $\frac{\delta \lambda_k}{(1-\lambda_k)(1+\rho\delta-\lambda_k)} \beta' u_k$ ，且当 $\lambda_k \rightarrow 0$ 时该贡献趋于零

TABLE 4 Regression of v of $v_{(h)}$							
h	1	2	3	4	...	160	165
Slope	0.42	0.77	0.95	0.94	...	1.00	1.00
R^2	0.32	0.53	0.94	0.94	...	1.00	1.00

TABLE 5 Regression of γ on $\gamma_{(h)}$							
h	1	2	3	4	...	160	165
Slope	0.19	0.42	0.51	0.51	...	0.02	0.03
R^2	0.06	0.14	0.38	0.38	...	0.03	0.03

- 在剔除前三个特征分量后，Domar权重中仍存在显著的残差变动
- 即使包含了极大特征值的前 (160/172) 或 (165/172) 个特征分量， R^2 也接近于零
- 解释Domar权重的变动需要几乎所有的特征分量
- 这是因为：每个特征分量对 γ' 的贡献为 $\frac{1}{1-\lambda_k} \beta' u_k$ ，且 $\lambda_k \approx 0$ 的分量仍然有显著的重要性

4.2 美国投入产出矩阵的因子结构

对两者差异进一步的直观理解

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma' &= \beta' \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-\lambda_k} u_k w_k' \\ v' &= \beta' \sum_{k=1}^N \frac{\delta \lambda_k}{(1-\lambda_k)(1+\rho\delta-\lambda_k)} u_k w_k' \end{aligned} \right.$$

求和形式的不同

- Domar权重:
 - 通过无限阶网络效应($I + \Sigma + \Sigma^2 + \dots$)进行的非贴现求和
 - 初始几阶与后面的同等重要
- 临时性冲击的福利影响:
 - 加权和 $\left((1-1)I + \left(1 - \frac{1}{1+\rho\delta}\right)\Sigma + \left(1 - \frac{1}{(1+\rho\delta)^2}\right)\Sigma^2 + \dots \right)$
 - 初始几阶数权重小, 后面的阶数权重大

*具有小特征值的特征分量在临时性冲击中对福利几乎没有影响; 但在永久性冲击中潜在地非常重要

具体而言, 考虑两个不同的实特征向量 u_k 和 u_l , 有 $\lambda_k < \lambda_l$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma' u_k &= \frac{1}{1-\lambda_k} \beta' u_k \\ v' u_k &= \frac{\delta \lambda_k}{(1-\lambda_k)(1+\rho\delta-\lambda_k)} \beta' u_k \end{aligned} \right. \longrightarrow \frac{|v' u_k|}{|v' u_l|} = \frac{\lambda_k}{\lambda_l} \times \frac{1+\rho\delta-\lambda_l}{1+\rho\delta-\lambda_k} \times \frac{|\gamma' u_k|}{|\gamma' u_l|}$$

- 动态模型 (相对于静态模型的) 权重重构
 - 提高大特征值 (长链条、慢衰减) 产业链权重
 - 压低小特征值 (短链条、快衰减) 产业链权重

实证结论: 重要的前三个特征向量代表哪些行业?

- u_1 代表金属和金属产品制造业、重工业制造业, 以及为商业活动提供服务 (代理、经纪和保险) 的行业
- u_2 与 u_1 相关 (相关系数为 0.72), 并隔离了对附加金属和专用重工业制造业 (如锻造和冲压, 以及锅炉、储罐和集装箱制造业) 的冲击
- u_3 代表食品产品业, 如畜产品、乳制品、谷物和油籽碾磨

三大类囊括美国经济全部超长上游供应链集群, 临时冲击损失持续时间最长, 主导全部福利波动

5 总结

模型构建

引入中间投入调整成本，构建解析可解的动态投入产出网络模型。

理论价值

得到闭式解，刻画了临时 TFP 冲击下经济渐进修复路径与福利效应。

核心结论与实证结论

- 产业链网络结构是决定冲击传导与福利损失的关键。
- 上游行业在临时性冲击恢复中的重要性极大。
- 临时冲击的福利影响可由生产网络低维因子刻画。